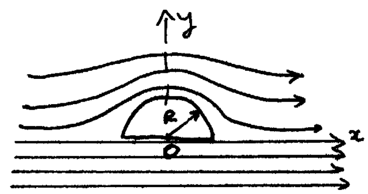
I. Une serre sous la tempête.

Une serre est protégée par une sorte de toiture en forme de demi-cylindre horizontal de longueur L grande devant son rayon R. Une violente tempête, un soir de Noël, engendre un vent qui, loin de la serre est horizontal, de vitesse orthogonale à l'axe du cylindre et de module V_∞ (voir figure). L'écoulement est pratiquement incompressible et irrotationnel, de sorte que le champ de vitesse soit le gradient d'une fonction Φ qui, en coordonnées cylindriques, est cherchée sous la forme suivante, indépendante de z :

$$\Phi(r, \theta) = A\, r\, \cos(\theta) + B\, \frac{\cos(\theta)}{r}$$

où A et B sont des constantes.



Question 1 :
Calculer A et B pour que la vitesse soit horizontale de module V_∞ loin de la toiture et qu'elle soit tangentielle au niveau de la toiture (donc pour $r = R$).

Au potentiel Φ correspond le champ de vitesses $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$, d'où :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v} = \left(A - \frac{B}{r^2}\right)\,\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \left(A + \frac{B}{r^2}\right)\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

On doit avoir $\lim\limits_{r \to \infty} \overrightarrow{v} = v_\infty\,\overrightarrow{e_r}$ soit

$$A\,(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = v_\infty\,\overrightarrow{e_r}$$

soit $A = v_\infty$, puisqu'il est aisé de voir que $\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_r}$

Par ailleurs pour $r = R$, la vitesse doit être tangente au cylindre, sa composante radiale doit donc s'annuler, soit

$$\left(A - \frac{B}{R^2}\right)\,\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{0} \qquad \text{d'où} \qquad B = A\,R^2 = v_\infty\,R^2$$

Question 2 :
Comment trouver la pression en tout point de l'espace ? On admettra que la pression loin de la toiture est uniforme et on la note p_∞ ; on note aussi μ la masse volumique de l'air. On néglige l'influence de la pesanteur.

L'écoulement est considéré comme parfait et incompressible, il est permanent, on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli entre deux points d'une même ligne de courant dont l'un est à l'infini où la vitesse est de module v_∞ et la pression p_∞, soit, en négligeant le terme en $g\,z$ (pesanteur négligée),

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\mu}$$

Il ne reste qu'à reporter la vitesse calculée plus haut, en tenant compte des valeurs de A et B ; un calcul de routine conduit à :

$$p(r, \theta) = p_\infty + \mu\,\frac{v_\infty^2}{2}\,\left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^2\,\cos^2\theta - \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^2\,\sin^2\theta\right]$$

Question 3 :

On admet qu'un manque (nécessaire) d'étanchéïté impose que la pression intérieure à la serre est celle du point au pied de la serre du côté au vent. En déduire le module F de la force de pression qui s'exerce sur la toiture. On rappelle les formules :

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\, \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = 0$$

Application numérique avec $p_\infty = 10^5\,\mathrm{Pa}$***,*** $\mu = 1,3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$***,*** $V_\infty = 144\,\mathrm{km.h^{-1}} = 40\,\mathrm{m.s^{-1}}$***,*** $R = 2$ ***m et*** $L = 10$ ***m***

En particulier au niveau de la paroi de la serre, la pression extérieure est (on choisit $r = R$ dans la formule ci-dessus)

$$p_{ext} = p(R,\theta) = p_\infty + \mu\,\frac{v_\infty^2}{2}\,\left[1 - 4\,\sin^2\theta\right]$$

et dans l'hypothèse de l'énoncé, la pression intérieure est

$$p_{int} = p(R,0) = p_\infty + \mu\,\frac{v_\infty^2}{2}$$

Un bande de longueur L de largeur $R\,\mathrm{d}\theta$ découpée sur la paroi de la serre a un vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}\,S} = L\,R\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_r}$ et est soumis à une force élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\,F} = -P_{ext}\,\overrightarrow{\mathrm{d}\,S} + P_{int}\,\overrightarrow{\mathrm{d}\,S} = 2\,\mu\,v_\infty^2\,\sin^2\theta\,L\,R\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_r}$$

Pour obtenir la force totale, il suffit d'intéger de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ sans tomber dans le piège classique, à savoir que $\overrightarrow{e_r}$ n'est pas un vecteur constant mais dépend de θ ($\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$). On a donc

$$\overrightarrow{F} = 2\,\mu\,v_\infty^2\,L\,R\left[\left(\int_0^\pi \sin^2\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\overrightarrow{e_y}\right] = \frac{8}{3}\,\mu\,v_\infty^2\,L\,R\,\overrightarrow{e_y}$$

L'application numérique donne une force de 55 kN capable donc de soulever une toiture de $5,5$ tonnes !

Remarquons que cette étude conduit à une force de traînée (force horizontale) nulle ce qui est invraisemblable : c'est que l'étude suppose l'écoulement laminaire et néglige toute force de viscosité. Néanmoins pour la composante verticale de la force, le résultat est une bonne approximation des mesures expérimentales.

II. Effet MAGNUS.

On veut modéliser l'écoulement d'un fluide autour d'un corps en mouvement de translation avec une vitesse de module v et animé d'un mouvement de rotation rapide de vitesse angulaire Ω ; on se place dans le cas d'un cylindre tournant autour de son axe de symétrie et l'on suppose que celui-ci entraîne un mouvement de rotation du fluide ; on propose, dans le référentiel lié au cylindre ce potentiel des vitesses en coordonnées cylindriques :

$$\Phi(r,\theta) = A\,r\,\cos(\theta) + B\,\frac{\cos(\theta)}{r} + C\,\theta$$

A et B ont la valeur calculée dans l'exercice précédent. Le terme $C\,\theta$ est phénoménologique.

Question 4 :

Justifier qualitivement que C est du signe de Ω. Calculer la vitesse et la pression en tout point ; en déduire la force exercée par l'air sur le cylindre et montrer que cette force dévie latéralement le cylindre.

L'air est entraîné par les forces de viscosité et donc tourne dans le même sens que le cylindre : C et Ω sont de même signe.

On rajoute à Φ le terme $C\,\theta$ donc à la vitesse le terme $\frac{1}{r}\,C\,\overrightarrow{e_\theta}$. Les calculs précédents conduisent à une pression sur le cylindre ($r = R$)

$$p(r,\theta) = p_\infty + \mu\,\frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{C}{R} - 2\,v_\infty\,\sin\theta\right)^2$$

Dans le calcul de la force totale (on intègre ici de $-\pi$ à π), le seul terme donnant un résultat non nul est

$$\overrightarrow{F} = \cdots \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\mu}{2}\,(\cdots - 2\,\frac{C}{R}\,2\,v_\infty\,\sin\theta\cdots)\,L\,R\,(-\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta})\,d\theta\cdots$$

$$\overrightarrow{F} = -2\,\mu\,C\,v_\infty\,L\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -2\,\pi\,\mu\,C\,v_\infty\,L\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Question 5 :

Application : Discuter l'intérêt d'un «effet» sur un ballon/une balle de football, volley-ball, tennis, golf,etc. On discutera selon que l'axe de rotation est vertical (comment tirer un coup franc ?) ou horizontal (et dans ce dernier cas selon le sens de rotation : lift ou slice).

Si le cylindre est fixe dans de l'air qui se déplace vers la droite, c'est la même chose que si le cylindre se déplaçait vers la gauche dans de l'air immobile. La rotation du cylindre dans le sens anté-horaire donne alors une force latérale qui dévie le cylindre vers le bas de la figure. Pour une sphère en rotation, on a les mêmes effets et l'on s'en sert au football, au tennis, au golf, etc. Quelques rares navires ont remplacé les voiles par des cylindres verticaux mis en rotation par un moteur auxiliaire (rotor Flettner).

Fig. 1. — Le Buckau, bateau à vent muni des deux rotors du système Flettner.